

Upper densities have the Darboux property

Paolo Leonetti

Università Bocconi di Milano

(Lavoro in collaborazione con Salvatore Tringali)

Sono state studiate in letteratura diverse nozioni di densità superiore di insiemi X di naturali, tra cui ricordiamo la densità superiore asintotica $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(X \cap [1, n])$ e la densità superiore di Banach $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{m \geq 0} \frac{1}{n} \#(X \cap [m+1, m+n])$.

Qui, proponiamo una teoria assiomatica di densità superiori sui naturali, dove chiamiamo *densità superiore* una qualunque funzione μ^* a valori reali definita sul power set di \mathbf{N} tale che sia monotona, subadditiva, (-1) -omogenea, e invariante a traslazioni, insieme ad una condizione di normalizzazione $\mu^*(\mathbf{N}) = 1$.

Otteniamo quindi una lista di insiemi “piccoli”, nel senso che $\mu^*(X) = 0$ per ogni densità superiore μ^* , e mostriamo che ogni μ^* ha la *proprietà di Darboux*, i.e., per ogni $X \subseteq Y$ e $a \in [\mu^*(X), \mu^*(Y)]$ esiste un insieme A tale che $\mu^*(A) = a$ e $X \subseteq A \subseteq Y$.

Riferimenti bibliografici

1. P. Leonetti and S. Tringali, *On the notions of upper and lower density*, preprint, last updated: Jan 13, 2016 (arxiv.org/abs/1506.04664).
2. P. Leonetti and S. Tringali, *Upper and lower densities have the strong Darboux property*, preprint, last updated: Dec 8, 2015 (arxiv.org/abs/1510.07473).