

La teoria delle strutture di regolarità di Martin Hairer

Massimo Iberti

22 dicembre 2014

Motivazioni

Equazioni differenziali stocastiche a derivate parziali (SPDE)

Equazione del calore

$$\partial_t u = \Delta u + \xi$$

ξ è il “rumore” (sia nello spazio che nel tempo)

ξ è una distribuzione!

Soluzione “ingenua”

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G(t-s, x-y) \xi(s, y) dy ds$$

Dove:

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

L'equazione del calore è lineare = usare le distribuzioni

SPDE non lineari

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

Problema: Non possiamo fare i prodotti di una distribuzione!

SPDE non lineari

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

Problema: Non possiamo fare i prodotti di una distribuzione!

Regolarizzare il rumore $\xi_\epsilon \rightarrow \xi!$

Problema: No convergenza $u_\epsilon \rightarrow ???$

La struttura di regolarità permette di attaccare il problema tramite sviluppi “alla Taylor”

Idea: Per rappresentare oggetti irregolari (distribuzioni) i polinomi non bastano!

Aggiungiamo nuovi simboli!

Taylor

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2 + \dots$$

Simboli $\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^2, \dots$

Struttura "algebrica"

$$f(x)\mathbf{1} + f'(x)\mathbf{X} + \frac{1}{2}f''(x)\mathbf{X}^2 + \dots$$

Nuovi simboli: il rumore "astratto" Ξ

Omogeneità Ogni polinomio “astratto” X^k ha una propria omogeneità caratteristica

Come assegnare omogeneità a Ξ ?

Esempio: Il moto browniano è omogeneo?

$$B_{\lambda t} \sim \lambda^{1/2} B_t$$

quasi Hölder continua $B_t \in C^{1/2-}$

Ξ avrà per “grado” la sua regolarità!

Struttura di regolarità

Definition

$\mathbb{S} = (A, T, G)$ dove

- A contiene i valori delle omogeneità
- $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_{\alpha}$ spazio vettoriale geneato dai simboli
- G gruppo di traslazioni

Esempio: Polinomi

- $A = \mathbb{N}$
- $T = \mathbb{R}[\mathbf{X}]$
- G sono le traslazioni

$$g_h \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} - h\mathbf{1}$$

Modello

Dare un “significato” ai simboli

Definition

Il modello (Π, Γ)

- $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow G$

$\Gamma_{x_0, x_1} = \text{“trasla” dal punto } x_0 \text{ a } x_1$

- Π associa il significato del simbolo

$$\Pi_x : T \rightarrow S'(\mathbb{R}^d)$$

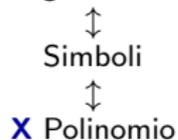
Esempio : sia data una funzione $w \in C^{1/2}(\mathbb{R})$

$$\Pi_{x_0}(a\mathbf{1} + b\mathbf{W}) = a + b(w(\cdot) - w(x_0))$$

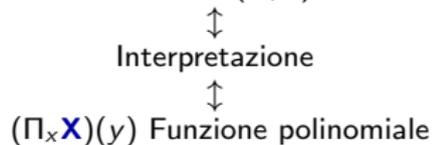
$$\Gamma_{x_0, x_1}\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

$$\Gamma_{x_0, x_1}\mathbf{W} = \mathbf{W} + (w(x_0) - w(x_1))\mathbf{1}$$

Struttura di regolarità $\mathbb{S} = (A, T, G)$



Modello (Π, Γ)



Dati i simboli e il modello, quali altre distribuzioni possiamo modellare?

Distribuzioni modellate

Fissiamo come “grado massimo dell’espansione” il parametro $\gamma \in \mathbb{R}$

$$F : x \mapsto \sum_{\beta < \gamma} c_{\beta,x} T_{\beta} \quad T_{\beta} \in T_{\beta}$$

Definiamo lo spazio in cui vivono:

Definition

$$\mathcal{D}^{\gamma} = \{F : \mathbb{R}^d \rightarrow \bigoplus_{\beta < \gamma} T_{\beta} : \text{per ogni compatto } K \subset \mathbb{R}^d, \ |||F|||_{\gamma,K} < \infty\}$$

dove

$$|||F|||_{\gamma,K} = \sup_{x \in K, \beta < \gamma} c_{\beta,x} + \sup_{x,y \in K; |x-y| < \gamma} \sup_{\beta < \gamma} \frac{\|F(x) - \Gamma_{x,y} F(y)\|_{\beta}}{|x-y|^{\gamma-\beta}}$$

Domanda: Da una distribuzione modellata, posso ricostruire una distribuzione?

Theorem (Teorema di ricostruzione)

Esiste un operatore $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\|(\mathcal{R}F - \Pi_x F(x))\|_{\mathcal{C}^\gamma} \lesssim \|F\|_{\gamma, K} \quad (1)$$

Inoltre per $\gamma > 0$ tale operatore è unico.

Theorem (Teorema di ricostruzione)

Esiste un operatore $\mathcal{R} : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\|(\mathcal{R}F - \Pi_x F(x))\|_{\mathcal{C}^\gamma} \lesssim \|F\|_{\gamma, K} \quad (1)$$

Inoltre per $\gamma > 0$ tale operatore è unico.

Dalla dimostrazione del teorema di ricostruzione si basa emerge che \mathcal{R} è definito come limite debole di

$$\mathcal{R}_n F = \sum_{x \in \Lambda_n} (\Pi_x F(x)) (\varphi_x^{(n)}) \varphi_x^{(n)}$$

Dove $\Lambda_n = \{j2^{-n} : j \in \mathbb{Z}^d\}$ è l'insieme dei numeri diadici di ordine n e $\varphi_x^{(n)}$ è una opportuna base di wavelets.

Strategia

Risolvere il problema in \mathcal{D}^γ e ricostruire la soluzione

Punto fisso: Cerchiamo in \mathcal{D}^γ la soluzione a

$$U = \mathcal{G} * (\Xi - U^3)$$

Convoluzione per elementi in \mathcal{D}^γ ?

Problema: La convoluzione non è un operatore “locale”

Idea: Scomporre il kernel singolare \mathcal{G} dell'equazione del calore in

$$\mathcal{G} = \mathcal{I} + \mathcal{N}$$

Dove

- \mathcal{I} = parte **locale** (contiene la singolarità)
- \mathcal{N} = parte **regolare** (è liscia)

Idea: Scomporre il kernel singolare \mathcal{G} dell'equazione del calore in

$$\mathcal{G} = \mathcal{I} + \mathcal{N}$$

Dove

- \mathcal{I} = parte **locale** (contiene la singolarità)
- \mathcal{N} = parte **regolare** (è liscia)

Hanno le proprietà:

\mathcal{I} : Agisce sui **simboli** in T , **crea nuovi simboli** con più elevata regolarità

$$|\mathcal{I}\tau| = 2 + |\tau|$$

\mathcal{N} : Non è locale, ma restituisce un polinomio (convoluzione con kernel regolare)

Il problema del punto fisso si risolve per iterazione

$$U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + (\text{parte polinomiale})$$

Tuttavia dobbiamo aggiungere anche i simboli per i prodotti

Il problema del punto fisso si risolve per iterazione

$$U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + (\text{parte polinomiale})$$

Tuttavia dobbiamo aggiungere anche i simboli per i prodotti

Tecnica: Aggiungere solo i prodotti necessari alla descrizione del punto fisso,
non di più!

Il problema del punto fisso si risolve per iterazione

$$U = \mathcal{I}(\Xi - U^3) + (\text{parte polinomiale})$$

Tuttavia dobbiamo aggiungere anche i simboli per i prodotti

Tecnica: Aggiungere solo i prodotti necessari alla descrizione del punto fisso,
non di più!

Ma quanti simboli abbiamo?

Proposition

Se l'equazione è localmente sottolineare allora

L'insieme dei simboli di regolarità inferiore a γ è finito

Problemi: definire il prodotto di due distribuzioni

$$\mathcal{R}(\Xi\Xi) := \mathcal{R}(\Xi)\mathcal{R}(\Xi) = \xi^2 = ???$$

che sia coerente col prodotto canonico.

Approssimare ξ con una sequenza di funzioni regolari $\xi_\epsilon \rightarrow \xi$. In questo modo

$$\mathcal{R}(\Xi\Xi) := \mathcal{R}(\Xi)\mathcal{R}(\Xi) = \xi_\epsilon^2$$

Problemi: definire il prodotto di due distribuzioni

$$\mathcal{R}(\Xi\Xi) := \mathcal{R}(\Xi)\mathcal{R}(\Xi) = \xi^2 = ???$$

che sia coerente col prodotto canonico.

Approssimare ξ con una sequenza di funzioni regolari $\xi_\epsilon \rightarrow \xi$. In questo modo

$$\mathcal{R}(\Xi\Xi) := \mathcal{R}(\Xi)\mathcal{R}(\Xi) = \xi_\epsilon^2$$

Ma!

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \xi_\epsilon^2 \stackrel{!}{=} \infty$$

Soluzione: Rinormalizzare!

$$\Pi_x^{(n)} \Xi = \log(n) \sin(ny) \simeq \frac{\log(n)}{n} \rightarrow 0 \quad \Pi_x^{(n)} \Xi^2 = \log^2(n) \sin^2(ny) \simeq \frac{\log^2(n)}{2} \rightarrow \infty$$

Trovare un operatore sui simboli $M^{(n)} : T \rightarrow T$

$$M^{(n)} \Xi^2 = \Xi^2 - \log^2(n) \frac{1}{2} \mathbf{1}$$

e definire (Π^M, Γ^M)

$$\Pi_x^M \Xi^2 = \Pi_x M^{(n)} \Xi^2 = \Pi_x \left(\Xi^2 - \log^2(n) \frac{1}{2} \mathbf{1} \right)$$

esempio

$$\partial_t u = \Delta u - u + \xi$$

La soluzione in \mathcal{D}^γ è esprimibile come

$$U = \mathcal{I}\Xi + \phi\mathbf{1} + \psi\mathbf{X} - \mathcal{I}(\mathcal{I}\Xi^3) - 3\phi\mathcal{I}(\mathcal{I}\Xi^2) + \dots$$

esempio

$$\partial_t u = \Delta u - u + \xi$$

La soluzione in \mathcal{D}' è esprimibile come

$$U = \mathcal{I}\Xi + \phi\mathbf{1} + \psi\mathbf{X} - \mathcal{I}(\mathcal{I}\Xi^3) - 3\phi\mathcal{I}(\mathcal{I}\Xi^2) + \dots$$

La rinormalizzazione restituisce

$$\partial_t U_\epsilon = \Delta U_\epsilon - U_\epsilon^3 + C_\epsilon U_\epsilon + \xi_\epsilon$$

C_ϵ “compensa” la non linearità

Theorem

$$\mathcal{R}^M U_\epsilon \rightarrow \hat{u}$$

inoltre \hat{u} non dipende dalla sequenza $\{\xi_\epsilon\}$.

Grazie per l'attenzione!



M. Hairer, “A theory of regularity structures”, *Inventiones Mathematicae*, 2014.



M. Hairer, “Introduction to regularity structures”, lecture notes (2014).