La teoria delle strutture di regolarità di Martin Hairer

Massimo Iberti

22 dicembre 2014

Motivazioni

Equazioni differenziali stochastiche a derivate parziali (SPDE)

Equazione del calore

$$\partial_t u = \Delta u + \xi$$

ξ è il "rumore" (sia nello spazio che nel tempo)

ξ è una distribuzione!

Soluzione "ingenua"

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G(t-s, x-y)\xi(s,y)dyds$$

Dove:

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

L'equazione del calore è lineare = usare le distribuioni

SPDE non lineari

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

Problema: Non possiamo fare i prodotti di una distribuzione!

SPDE non lineari

$$\partial_t u = \Delta u - u^3 + \xi$$

Problema: Non possiamo fare i prodotti di una distribuzione!

Regolarizzare il rumore $\xi_\epsilon \to \xi$!

Problema: No convergenza $u_\epsilon \to$???

La struttura di regolarità permette di attaccare il problema tramite sviluppi "alla Taylor"

Idea: Per rappresentare oggetti irregolari (distribuzioni) i polinomi non bastano!

Aggiungiamo nuovi simboli!

Taylor

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(x)(y - x)^2 + \dots$$

Simboli $\mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^2, \dots$
Struttura "algebrica"

$$f(x)\mathbf{1} + f'(x)\mathbf{X} + \frac{1}{2} f''(x)\mathbf{X}^2 + \dots$$

Nuovi simboli: il rumore "astratto" $\mathbf{\Xi}$

Omogeneità Ogni polinomio "astratto" $\mathbf{X}^k$ ha una propria omogeneità caratteristica

Come assegnare omogeneità a $\boldsymbol{\Xi}$?

Esempio: Il moto browniano è omogeneo?

$$B_{\lambda t} \sim \lambda^{1/2} B_t$$

quasi Hölder continua $B_t \in \mathcal{C}^{1/2-}$

$\boldsymbol{\Xi}$ avrà per "grado" la sua regolarità!

Struttura di regolarità

Definition

$\mathbb{S} = (A, T, G)$ *dove*

- *A contiene i valori delle omogeneità*
- $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ *spazio vettoriale geneato dai simboli*
- *G gruppo di traslazioni*

Esempio: Polinomi

- $A = \mathbb{N}$
- $T = \mathbb{R}[\mathbf{X}]$
- G sono le traslazioni

$$g_h \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} - h\mathbf{1}$$

Modello

Dare un "significato" ai simboli

Definition

Il modello (Π, Γ)

- $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to G$

$$\Gamma_{x_0,x_1} = \text{“}\textit{trasla}\text{” } \textit{dal punto } x_0 \textit{ a } x_1$$

- Π *associa il significato del simbolo*

$$\Pi_x : T \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

Esempio : sia data una funzione $w \in \mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\Pi_{x_0}(a\mathbf{1} + b\mathbf{W}) &= a + b(w(\cdot) - w(x_0)) \\
\Gamma_{x_0,x_1}\mathbf{1} &= \mathbf{1} \\
\Gamma_{x_0,x_1}\mathbf{W} &= \mathbf{W} + (w(x_0) - w(x_1))\mathbf{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Struttura di regolarità } \mathbb{S} = (A, T, G) & & \text{Modello } (\Pi, \Gamma) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Simboli} & & \text{Interpretazione} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\mathbf{X} \text{ Polinomio} & & (\Pi_x \mathbf{X})(y) \text{ Funzione polinomiale}
\end{array}$$

Dati i simboli e il modello, quali altre distribuioni possiamo modellare?

Distribuzioni modellate

Fissiamo come "grado massimo dell'espansione" il parametro $\gamma \in \mathbb{R}$

$$F : x \mapsto \sum_{\beta<\gamma} c_{\beta,x}\tau_\beta \qquad \tau_\beta \in T_\beta$$

Definiamo lo spazio in cui vivono:

Definition

$$\mathcal{D}^\gamma = \{F : \mathbb{R}^d \to \bigoplus_{\beta<\gamma} T_\beta : \text{ per ogni compatto } K \subset \mathbb{R}^d, \quad |||F|||_{\gamma,K} < \infty\}$$

dove

$$|||F|||_{\gamma,K} = \sup_{x\in K,\beta<\gamma} c_{\beta,x} + \sup_{x,y\in K;|x-y|<\gamma} \sup_{\beta<\gamma} \frac{\|F(x) - \Gamma_{x,y}F(y)\|_\beta}{|x-y|^{\gamma-\beta}}$$

Domanda: Da una distribuzione modellata, posso ricostruire una distribuzione?

Theorem (Teorema di ricostruzione)

Esiste un operatore $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *tale che*

$$|(\mathcal{R}F - \Pi_x F(x))|_{\mathcal{C}^\gamma} \lesssim |||F|||_{\gamma,K} \tag{1}$$

Inoltre per $\gamma > 0$ *tale operatore è unico.*

Theorem (Teorema di ricostruzione)

Esiste un operatore $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *tale che*

$$|(\mathcal{R}F - \Pi_x F(x))|_{\mathcal{C}^\gamma} \lesssim |||F|||_{\gamma,K} \tag{1}$$

Inoltre per $\gamma > 0$ *tale operatore è unico.*

Dalla dimostrazione del teorema di ricostruzione si basa emerge che $\mathcal{R}$ è definito come limite debole di

$$\mathcal{R}_n F = \sum_{x \in \Lambda_n} (\Pi_x F(x))(\varphi_x^{(n)})\varphi_x^{(n)}$$

Dove $\Lambda_n = \{j 2^{-n} : \quad j \in \mathbb{Z}^d\}$ è l'insieme dei numeri diadici di ordine n e $\varphi_x^{(n)}$ è una opportuna base di wavelets.

Strategia

Risolvere il problema in $\mathcal{D}^\gamma$ e ricostruire la soluzione

Punto fisso: Cerchiamo in $\mathcal{D}^\gamma$ la soluzione a

$$U = \mathcal{G} * (\boldsymbol{\Xi} - U^3)$$

Convoluzione per elementi in $\mathcal{D}^\gamma$?

Problema: La convoluzione non è un operatore "locale"

Idea: Scomporre il kernel singolare $\mathcal{G}$ dell'equazione del calore in

$$\mathcal{G} = \mathcal{I} + \mathcal{N}$$

Dove

- $\mathcal{I}$ = parte **locale** (contiene la singolarità)
- $\mathcal{N}$ = parte **regolare** (è liscia)

Idea: Scomporre il kernel singolare $\mathcal{G}$ dell'equazione del calore in

$$\mathcal{G} = \mathcal{I} + \mathcal{N}$$

Dove

- $\mathcal{I}$ = parte **locale** (contiene la singolarità)
- $\mathcal{N}$ = parte **regolare** (è liscia)

Hanno le proprietà:

$\mathcal{I}$: Agisce sui **simboli** in T , **crea nuovi simboli** con più elevata regolarità

$$|\mathcal{I}\tau| = 2 + |\tau|$$

$\mathcal{N}$: Non è locale, ma restituisce un polinomio (convoluzione con kernel regolare)

Il problema del punto fisso si risolve per iterazione

$$U = \mathcal{I}(\boldsymbol{\Xi} - U^3) + (\text{parte polinomiale})$$

Tuttavia dobbiamo aggiungere anche i simboli per i prodotti

Il problema del punto fisso si risolve per iterazione

$$U = \mathcal{I}(\boldsymbol{\Xi} - U^3) + (\text{parte polinomiale})$$

Tuttavia dobbiamo aggiungere anche i simboli per i prodotti

Tecnica: Aggiungere solo i prodotti necessari alla descrizione del punto fisso, **non di più**!

Il problema del punto fisso si risolve per iterazione

$$U = \mathcal{I}(\boldsymbol{\Xi} - U^3) + (\text{parte polinomiale})$$

Tuttavia dobbiamo aggiungere anche i simboli per i prodotti

Tecnica: Aggiungere solo i prodotti necessari alla descrizione del punto fisso, **non di più**!

Ma quanti simboli abbiamo?

Proposition

Se l'equazione è localmente sottolineare allora

L'insieme dei simboli di regolarità inferiore a γ è finito

Problemi: definire il prodotto di due distribuzioni

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi\Xi}) := \mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi})\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi}) = \xi^2 = ???$$

che sia coerente col prodotto canonico.
Approssimare ξ con una sequenza di funzioni regolari $\xi_\epsilon \to \xi$. In questo modo

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi\Xi}) := \mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi})\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi}) = {\xi_\epsilon}^2$$

Problemi: definire il prodotto di due distribuzioni

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi\Xi}) := \mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi})\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi}) = \xi^2 = ???$$

che sia coerente col prodotto canonico.
Approssimare ξ con una sequenza di funzioni regolari $\xi_\epsilon \to \xi$. In questo modo

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi\Xi}) := \mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi})\mathcal{R}(\boldsymbol{\Xi}) = {\xi_\epsilon}^2$$

Ma!

$$\lim_{\epsilon \to 0} {\xi_\epsilon}^2 \overset{!}{=} \infty$$

Soluzione: Rinormalizzare!

$$\Pi_x^{(n)}\boldsymbol{\Xi} = \log(n)\sin(ny) \simeq \frac{\log(n)}{n} \to 0 \qquad \Pi_x^{(n)}\boldsymbol{\Xi}^2 = \log^2(n)\sin^2(ny) \simeq \frac{\log^2(n)}{2} \to \infty$$

Trovare un operatore sui simboli $M^{(n)} : T \to T$

$$M^{(n)}\boldsymbol{\Xi}^2 = \boldsymbol{\Xi}^2 - \log^2(n)\frac{1}{2}\mathbf{1}$$

e definire (Π^M, Γ^M)

$$\Pi_x^M\boldsymbol{\Xi}^2 = \Pi_x M^{(n)}\boldsymbol{\Xi}^2 = \Pi_x\left(\boldsymbol{\Xi}^2 - \log^2(n)\frac{1}{2}\mathbf{1}\right)$$

esempio

$$\partial_t u = \Delta u - u + \xi$$

La soluzione in $\mathcal{D}^\gamma$ è esprimibile come

$$U = \mathcal{I}\boldsymbol{\Xi} + \phi\mathbf{1} + \psi\mathbf{X} - \mathcal{I}(\mathcal{I}\boldsymbol{\Xi}^3) - 3\phi\mathcal{I}(\mathcal{I}\boldsymbol{\Xi}^2) + \ldots$$

esempio

$$\partial_t u = \Delta u - u + \xi$$

La soluzione in $\mathcal{D}^\gamma$ è esprimibile come

$$U = \mathcal{I}\mathbf{\Xi} + \phi\mathbf{1} + \psi\mathbf{X} - \mathcal{I}(\mathcal{I}\mathbf{\Xi}^3) - 3\phi\mathcal{I}(\mathcal{I}\mathbf{\Xi}^2) + \ldots$$

La rinormalizzazione restituisce

$$\partial_t U_\epsilon = \Delta U_\epsilon - U_\epsilon^3 + C_\epsilon U_\epsilon + \xi_\epsilon$$

C_ϵ “compensa” la non linearità

Theorem

$$\mathcal{R}^M U_\epsilon \to \hat{u}$$

inoltre $\hat{u}$ non dipende dalla sequenza $\{\xi_\epsilon\}$.

Grazie per l'attenzione!

M. Hairer, “A theory of regularity structures”, Inventiones Mathematicae, 2014.

M. Hairer, “Introduction to regularity structures”, lecture notes (2014).