Equivariant resolutions of De Concini-Procesi ideals

Federico Galetto

Welcome Home Workshop
Università degli studi di Torino
19 Dicembre 2014

Risoluzioni libere

- $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$
- M R-modulo graduato finitamente generato

Definizione

Una *risoluzione libera* di M è un complesso di R-moduli liberi graduati

$$F_\bullet : F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} F_2 \xleftarrow{\partial_3} F_3 \leftarrow \dots$$

tale che:

- $\mathrm{coker}(\partial_1) \cong M$,
- $\forall i > 0 \ \ker(\partial_i) = \mathrm{im}(\partial_{i+1})$.

$F_\bullet$ è detta *minimale* se $\forall i$ il rango di F_i è il più piccolo possibile.

Risoluzioni libere

Esempio

- $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
- $M = R/(x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$

Il complesso

$$R \xleftarrow{\begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \end{bmatrix}} R(-2)^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} -x_3 & -x_3 \\ x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}} R(-3)^2 \leftarrow 0$$

è una risoluzione libera minimale di M.

Risoluzioni libere e invarianti

Esempio

- $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
- $M = R/(x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$

$$R \leftarrow R(-2)^3 \leftarrow R(-3)^2 \leftarrow 0$$

La serie di Hilbert di M è

$$\begin{aligned} H_M(t) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}}(M_i)t^i = \\ &= H_R(t) - 3H_{R(-2)}(t) + 2H_{R(-3)}(t) = \\ &= \frac{1}{(1-t)^3} - \frac{3t^2}{(1-t)^3} + \frac{2t^3}{(1-t)^3} = \frac{1+2t}{1-t} \end{aligned}$$

Rappresentazioni di gruppi

Definizione

Una *rappresentazione* di un gruppo G su $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ con un'azione lineare di G.

Esempio

- $G = \mathfrak{S}_3$
- $V = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle_{\mathbb{C}}$
- $\mathfrak{S}_3$ agisce permutando gli indici

$$\mathrm{id}\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)\colon \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)\colon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(23)\colon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (123)\colon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (132)\colon \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Risoluzioni equivarianti

Teorema

Sia $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, M un R-modulo e

$$F_\bullet \colon F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} F_2 \xleftarrow{\partial_3} F_3 \leftarrow \ldots$$

una risoluzione libera minimale di M.
Sia G un gruppo finito che agisce su R e M

- con un'azione lineare,
- preservando il grado $(\deg(g \cdot m) = \deg(m))$,
- compatibilmente col prodotto $(g \cdot (rm) = (g \cdot r)(g \cdot m))$.

Allora G agisce su ciascun modulo F_i e l'azione commuta con le mappe ∂_i.

Si dice che $F_\bullet$ è una risoluzione G-*equivariante*.

Rappresentazioni irriducibili

Definizione

Una rappresentazione V di G si dice *irriducibile* se non è somma diretta di due rappresentazioni entrambe diverse da zero.

Teorema

Se G è un gruppo finito, G ha un numero finito di rappresentazioni irriducibili. Inoltre, ogni rappresentazione finito dimensionale di G è somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

Esempio

Le rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{S}_n$ sono parametrizzate dalle partizioni di n.

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle_{\mathbb{C}} = [3] \oplus [2, 1]$$

Risoluzioni equivarianti ed invarianti

Esempio

- $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
- $M = R/(x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$
- $\mathfrak{S}_3$ agisce permutando gli indici delle variabili

$$R \leftarrow ([3] \oplus [2,1]) \otimes R(-2) \leftarrow [2,1] \otimes R(-3) \leftarrow 0$$

Il carattere di M è dato da

$$\begin{aligned}\chi_M(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \chi_{M_i} t^i = \\ &= \chi_R(t) - (\chi_{[3]} + \chi_{[2,1]})\chi_{R(-2)}(t) + \chi_{[2,1]}\chi_{R(-3)}(t)\end{aligned}$$

Ideali di De Concini-Procesi

Sia $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ una partizione di n.
Sia X_μ una matrice $n \times n$ unipotente la cui forma canonica di Jordan ha blocchi di dimensioni $\mu_1, \ldots, \mu_t$ (e autovalore 1).

Definizione

La fibra di Springer associata a μ è

$$\mathcal{F}_\mu := \{V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = \mathbb{C}^n \mid \dim_{\mathbb{C}}(V_i) = i, X_\mu(V_i) \subseteq V_i\}.$$

Teorema (De Concini-Procesi)

$H^*(\mathcal{F}_\mu) \cong R/I_{\tilde{\mu}}$, dove $\tilde{\mu}$ è la partizione coniugata di μ.

$I_{\tilde{\mu}}$ è l'ideale di De Concini-Procesi associato a $\tilde{\mu}$.

Ideali di De Concini-Procesi

Sia $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ una partizione di n.
Si considerino gli insiemi:

- $\mathcal{D}$, delle matrici diagonali $n \times n$;
- $\mathcal{N}_\mu$, delle matrici nilpotenti $n \times n$ la cui forma canonica di Jordan ha blocchi di dimensione $\mu_1, \dots, \mu_t$ (e autovalore 0).

Gli insiemi $\mathcal{D}$ e $\overline{\mathcal{N}}_\mu$ sono sottovarietà algebriche dello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n^2}$ delle matrici $n \times n$.

Teorema (Kraft)

$$\mathcal{D} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{N}_\mu \cong \operatorname{Spec}(R/I_\mu)$$

I_μ è l'ideale di De Concini-Procesi associato a μ.

Risoluzioni nel caso dei "ganci"

Per ogni $1 \leqslant d \leqslant n$ definiamo gli ideali di $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$:

- $E_{d,n} := (e_1, \ldots, e_{d-1})$, dove $e_j = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_j \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_j}$;
- $I_{d,n} := (x_{i_1} \ldots x_{i_d} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n)$.

Teorema (Biagioli-Faridi-Rosas)

Se $\mu = (n - d + 1, 1^{d-1})$, allora

$$I_\mu = E_{d,n} + I_{d,n}.$$

Inoltre una risoluzione minimale di I_μ si ottiene a partire da una risoluzione minimale di $I_{d,n}$ mediante una serie di mapping cone.

Risoluzioni equivarianti nel caso dei “ganci”

Il gruppo $\mathfrak{S}_n$ agisce su $R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ permutando le variabili. Inoltre:

- $e_1, \dots, e_n$ sono invarianti di $\mathfrak{S}_n$, perciò $\mathfrak{S}_n \cdot E_{d,n} = E_{d,n}$;
- $\mathfrak{S}_n \cdot I_{d,n} = I_{d,n}$;
- $\mathfrak{S}_n \cdot I_\mu = I_\mu$;
- il mapping cone è compatibile con l’azione di gruppo.

Proposizione (G.)

Se $\mu = (n - d + 1, 1^{d-1})$, allora una risoluzione $\mathfrak{S}_n$-equivariante di I_μ si ottiene a partire da una risoluzione $\mathfrak{S}_n$-equivariante di $I_{d,n}$ mediante una serie di mapping cone.

Risoluzioni equivarianti nel caso dei "ganci"

Teorema (G.)

$I_{d,n}$ ha una risoluzione minimale $\mathfrak{S}_n$-equivariante della forma

$$U_0^{d,n} \otimes R_n(-d) \leftarrow \ldots \leftarrow U_i^{d,n} \otimes R_n(-d-i) \leftarrow \ldots$$

dove, per ogni $0 \leqslant i \leqslant n-d$,

$$U_i^{d,n} \cong \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{d+i} \times \mathfrak{S}_{n-d-i}}^{\mathfrak{S}_n} \left([d, 1^i] \otimes [n-d-i] \right).$$

Osservazioni

- $U_i^{d,n}$ si decompone in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili ciascuna delle quali ha molteplicità al più 1.
- $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(U_i^{d,n}) \cong U_i^{d,n-1} \oplus U_i^{d-1,n-1} \oplus U_{i-1}^{d,n-1}$.

Combinatoria dei numeri di Betti

Teorema (G.)

I tableaux di Young standard su $(d, 1^i)$ con entrate in $\{1, \ldots, n\}$ formano una base di $U_i^{d,n}$.

Esempio (n=5,d=2,i=2)

$$U_2^{2,4} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$U_2^{1,4} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \xcancel{5} \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \xcancel{5} \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \xcancel{5} \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \xcancel{5} \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$U_1^{2,4} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \xcancel{5} \\ \cline{1-1}\end{array}$$