A 2-Sphere of Complex Structures

Niccolò Lora Lamia Donin

Leibniz Universität Hannover

22 Dicembre 2014

Siano V uno spazio vettoriale reale, $\dim_{\mathbb{R}} V = 4n =: 2k$ e $\mathcal{J}(V)$ lo spazio di tutte le strutture complesse su V. Supponiamo di avere $I, J \in \mathcal{J}(V)$ tali per cui $IJ = -JI$. Per ogni $(a, b, c) \in S^2$, si ha $(aI + bJ + cK)^2 = -\mathbb{1}$, dunque $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa su V. Ricordando che $S^2 \cong \mathbb{P}^1$, abbiamo una mappa $K \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{J}(V)$.

Supponiamo esista $A \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow T\mathcal{J}(V)$ che solleva K come in figura.

$$\begin{tikzcd} & T\mathcal{J}(V) \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & \mathcal{J}(V) \end{tikzcd}$$

Mostreremo di seguito che A si può scrivere come polinomio nella coordinata ζ di $\mathbb{P}^1$ a coefficienti in $C^{k,k}$, modulo "coniugio" per elementi di $GL(k, \mathbb{C})$.

Siano V uno spazio vettoriale reale, $\dim_{\mathbb{R}} V = 4n =: 2k$ e $\mathcal{J}(V)$ lo spazio di tutte le strutture complesse su V. Supponiamo di avere $I, J \in \mathcal{J}(V)$ tali per cui $IJ = -JI$. Per ogni $(a, b, c) \in S^2$, si ha $(aI + bJ + cK)^2 = -\mathbb{1}$, dunque $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa su V. Ricordando che $S^2 \cong \mathbb{P}^1$, abbiamo una mappa $K \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{J}(V)$.

Supponiamo esista $A \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow T\mathcal{J}(V)$ che solleva K come in figura.

$$\begin{tikzcd} & T\mathcal{J}(V) \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & \mathcal{J}(V) \end{tikzcd}$$

Mostreremo di seguito che A si può scrivere come polinomio nella coordinata ζ di $\mathbb{P}^1$ a coefficienti in $C^{k,k}$, modulo "coniugio" per elementi di $GL(k, \mathbb{C})$.

Siano V uno spazio vettoriale reale, $\dim_{\mathbb{R}} V = 4n =: 2k$ e $\mathcal{J}(V)$ lo spazio di tutte le strutture complesse su V. Supponiamo di avere $I, J \in \mathcal{J}(V)$ tali per cui $IJ = -JI$. Per ogni $(a, b, c) \in S^2$, si ha $(aI + bJ + cK)^2 = -\mathbb{1}$, dunque $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa su V. Ricordando che $S^2 \cong \mathbb{P}^1$, abbiamo una mappa $K\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{J}(V)$.

Supponiamo esista $A\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow T\mathcal{J}(V)$ che solleva K come in figura.

$$\begin{tikzcd}
 & T\mathcal{J}(V) \arrow[d] \\
\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & \mathcal{J}(V)
\end{tikzcd}$$

Mostreremo di seguito che A si può scrivere come polinomio nella coordinata ζ di $\mathbb{P}^1$ a coefficienti in $C^{k,k}$, modulo "coniugio" per elementi di $GL(k, \mathbb{C})$.

Siano V uno spazio vettoriale reale, $\dim_{\mathbb{R}} V = 4n =: 2k$ e $\mathcal{J}(V)$ lo spazio di tutte le strutture complesse su V. Supponiamo di avere $I, J \in \mathcal{J}(V)$ tali per cui $IJ = -JI$. Per ogni $(a, b, c) \in S^2$, si ha $(aI + bJ + cK)^2 = -\mathbb{1}$, dunque $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa su V. Ricordando che $S^2 \cong \mathbb{P}^1$, abbiamo una mappa $K\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{J}(V)$.
Supponiamo esista $A\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow T\mathcal{J}(V)$ che solleva K come in figura.

$$\begin{tikzcd} & T\mathcal{J}(V) \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & \mathcal{J}(V) \end{tikzcd}$$

Mostreremo di seguito che A si può scrivere come polinomio nella coordinata ζ di $\mathbb{P}^1$ a coefficienti in $C^{k,k}$, modulo "coniugio" per elementi di $GL(k, \mathbb{C})$.

Siano V uno spazio vettoriale reale, $\dim_{\mathbb{R}} V = 4n =: 2k$ e $\mathcal{J}(V)$ lo spazio di tutte le strutture complesse su V. Supponiamo di avere $I, J \in \mathcal{J}(V)$ tali per cui $IJ = -JI$. Per ogni $(a, b, c) \in S^2$, si ha $(aI + bJ + cK)^2 = -\mathbb{1}$, dunque $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa su V. Ricordando che $S^2 \cong \mathbb{P}^1$, abbiamo una mappa $K \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{J}(V)$.
Supponiamo esista $A \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow T\mathcal{J}(V)$ che solleva K come in figura.

$$\begin{tikzcd}
 & T\mathcal{J}(V) \arrow[d] \\
\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & \mathcal{J}(V)
\end{tikzcd}$$

Mostreremo di seguito che A si può scrivere come polinomio nella coordinata ζ di $\mathbb{P}^1$ a coefficienti in $C^{k,k}$, modulo "coniugio" per elementi di $GL(k, \mathbb{C})$.

Vettori di tipo $(1,0)$

È noto che assegnare una struttura complessa $J \in \mathcal{J}(V)$ è equivalente ad assegnare il sottospazio dei vettori di V di tipo $(1,0)$ per J, ossia $V_J^{1,0} = \{\mathbf{v} \in V | J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}\} \subset V^{\mathbb{C}}$.

Ancora, sappiamo che $\dim_{\mathbb{C}} V_J^{1,0} = k$: dunque $V_J^{1,0}$ è un punto della Grassmanniana $Gr_k(2k)$. Il nostro diagramma si può quindi riscrivere come

$$\begin{tikzcd} & TGr_k(2k) \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & Gr_k(2k) \end{tikzcd}$$

Dobbiamo allora capire quale sia la struttura di $TGr_k(2k)$.

Vettori di tipo $(1, 0)$

È noto che assegnare una struttura complessa $J \in \mathcal{J}(V)$ è equivalente ad assegnare il sottospazio dei vettori di V di tipo $(1, 0)$ per J, ossia $V_J^{1,0} = \{\mathbf{v} \in V | J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}\} \subset V^{\mathbb{C}}$.
Ancora, sappiamo che $\dim_{\mathbb{C}} V_J^{1,0} = k$: dunque $V_J^{1,0}$ è un punto della Grassmanniana $Gr_k(2k)$. Il nostro diagramma si può quindi riscrivere come

$$\begin{tikzcd} & TGr_k(2k) \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & Gr_k(2k) \end{tikzcd}$$

Dobbiamo allora capire quale sia la struttura di $TGr_k(2k)$.

Vettori di tipo $(1,0)$

È noto che assegnare una struttura complessa $J \in \mathcal{J}(V)$ è equivalente ad assegnare il sottospazio dei vettori di V di tipo $(1,0)$ per J, ossia $V_J^{1,0} = \{\mathbf{v} \in V | J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}\} \subset V^{\mathbb{C}}$.
Ancora, sappiamo che $\dim_{\mathbb{C}} V_J^{1,0} = k$: dunque $V_J^{1,0}$ è un punto della Grassmanniana $Gr_k(2k)$. Il nostro diagramma si può quindi riscrivere come

$$\begin{tikzcd} & TGr_k(2k) \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, dashed, "A"] \arrow[r, "K"'] & Gr_k(2k) \end{tikzcd}$$

Dobbiamo allora capire quale sia la struttura di $TGr_k(2k)$.

Il Tangente della Grassmanniana

Definzione. (Fibrato Tautologico della Grassmanniana)

Si consideri un generico punto $\mathbf{x} \in Gr_k(2k)$ e sia $W_{\mathbf{x}}$ il sottospazio di V individuato da $\mathbf{x}$.

Il fibrato vettoriale $\mathcal{S} \longrightarrow Gr_k(2k)$ avente fibra $\mathcal{S}_{\mathbf{x}} = W_{\mathbf{x}}$ è detto *fibrato tautologico* di $Gr_k(2k)$.

Consideriamo ora il fibrato banale $\underline{\mathbb{C}}^{2k} = Gr_k(2k) \times \mathbb{C}^{2k}$ e definiamo il fibrato quoziente $\mathcal{Q} = \underline{\mathbb{C}}^{2k} / \mathcal{S}$.
Si ha allora l'isomorfismo

$$TGr_k(2k) = S^* \otimes \mathcal{Q}.$$

Il Tangente della Grassmanniana

Definzione. (Fibrato Tautologico della Grassmanniana)

Si consideri un generico punto $\mathbf{x} \in Gr_k(2k)$ e sia $W_\mathbf{x}$ il sottospazio di V individuato da $\mathbf{x}$.
Il fibrato vettoriale $\mathcal{S} \longrightarrow Gr_k(2k)$ avente fibra $\mathcal{S}_\mathbf{x} = W_\mathbf{x}$ è detto *fibrato tautologico* di $Gr_k(2k)$.

Consideriamo ora il fibrato banale $\underline{\mathbb{C}}^{2k} = Gr_k(2k) \times \mathbb{C}^{2k}$ e definiamo il fibrato quoziente $\mathcal{Q} = \underline{\mathbb{C}}^{2k}/\mathcal{S}$.
Si ha allora l'isomorfismo

$$TGr_k(2k) = S^* \otimes \mathcal{Q}.$$

Il Tangente della Grassmanniana

Definzione. (Fibrato Tautologico della Grassmanniana)

Si consideri un generico punto $\mathbf{x} \in Gr_k(2k)$ e sia $W_\mathbf{x}$ il sottospazio di V individuato da $\mathbf{x}$.
Il fibrato vettoriale $\mathcal{S} \longrightarrow Gr_k(2k)$ avente fibra $\mathcal{S}_\mathbf{x} = W_\mathbf{x}$ è detto *fibrato tautologico* di $Gr_k(2k)$.

Consideriamo ora il fibrato banale $\underline{\mathbb{C}}^{2k} = Gr_k(2k) \times \mathbb{C}^{2k}$ e definiamo il fibrato quoziente $\mathcal{Q} = \underline{\mathbb{C}}^{2k}/\mathcal{S}$.
Si ha allora l'isomorfismo

$$TGr_k(2k) = S^* \otimes \mathcal{Q}.$$

Il Tangente della Grassmanniana

Definzione. (Fibrato Tautologico della Grassmanniana)

Si consideri un generico punto $\mathbf{x} \in Gr_k(2k)$ e sia $W_{\mathbf{x}}$ il sottospazio di V individuato da $\mathbf{x}$.
Il fibrato vettoriale $\mathcal{S} \longrightarrow Gr_k(2k)$ avente fibra $\mathcal{S}_{\mathbf{x}} = W_{\mathbf{x}}$ è detto *fibrato tautologico* di $Gr_k(2k)$.

Consideriamo ora il fibrato banale $\underline{\mathbb{C}}^{2k} = Gr_k(2k) \times \mathbb{C}^{2k}$ e definiamo il fibrato quoziente $\mathcal{Q} = \underline{\mathbb{C}}^{2k}/\mathcal{S}$.
Si ha allora l'isomorfismo

$$TGr_k(2k) = S^* \otimes \mathcal{Q}.$$

Pullback via K

Osserviamo che la mappa K ci permette di trasportare, via pullback, i fibrati $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ su $\mathbb{P}^1$, dando origine a $K^*\mathcal{S}$ e $K^*\mathcal{Q}$. Per comprendere la struttura di $K^*\mathcal{S}$ e $K^*\mathcal{Q}$, richiamiamo un famoso teorema.

Teorema. (Grothendieck)

Sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale olomorfo su $\mathbb{P}^1$ di rango $\operatorname{rank}\mathcal{E} = r$. Allora si ha lo splitting $\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}(l_j)$.

Dunque $K^*\mathcal{S} = \bigoplus \mathcal{O}(l_j)$ per opportuni l_j. Quali?

Pullback via K

Osserviamo che la mappa K ci permette di trasportare, via pullback, i fibrati $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ su $\mathbb{P}^1$, dando origine a $K^*\mathcal{S}$ e $K^*\mathcal{Q}$. Per comprendere la struttura di $K^*\mathcal{S}$ e $K^*\mathcal{Q}$, richiamiamo un famoso teorema.

Teorema. (Grothendieck)

Sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale olomorfo su $\mathbb{P}^1$ di rango $\operatorname{rank}\mathcal{E} = r$.

Allora si ha lo splitting $\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}(l_j)$.

Dunque $K^*\mathcal{S} = \bigoplus \mathcal{O}(l_j)$ per opportuni l_j. Quali?

Pullback via K

Osserviamo che la mappa K ci permette di trasportare, via pullback, i fibrati $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ su $\mathbb{P}^1$, dando origine a $K^*\mathcal{S}$ e $K^*\mathcal{Q}$. Per comprendere la struttura di $K^*\mathcal{S}$ e $K^*\mathcal{Q}$, richiamiamo un famoso teorema.

Teorema. (Grothendieck)

Sia $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale olomorfo su $\mathbb{P}^1$ di rango $\operatorname{rank}\mathcal{E} = r$.

Allora si ha lo splitting $\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathcal{O}(l_j)$.

Dunque $K^*\mathcal{S} = \bigoplus \mathcal{O}(l_j)$ per opportuni l_j. Quali?

Una Proposizione

La mappa $K\colon P^1 \longrightarrow Gr_k(2k)$ descrive la cosiddetta *curva di Morita*. Per questa curva si conosce esplicitamente lo splitting di $K^*\mathcal{S}$, che risulta essere $K^*\mathcal{S} \cong \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{O}(-1) \cong \mathcal{O}(-1)^{\oplus k}$. Usiamo questo fatto per provare la proposizione seguente, che definisce la struttura di $K^*\mathcal{Q}$.

Proposizione.

Siano $\zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{P}^1$. Si ha l'equivalenza

$$V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\} \iff K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}.$$

Una Proposizione

La mappa $K\colon P^1 \longrightarrow Gr_k(2k)$ descrive la cosiddetta *curva di Morita*. Per questa curva si conosce esplicitamente lo splitting di $K^*\mathcal{S}$, che risulta essere $K^*\mathcal{S} \cong \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{O}(-1) \cong \mathcal{O}(-1)^{\oplus k}$.Usiamo questo fatto per provare la proposizione seguente, che definisce la struttura di $K^*\mathcal{Q}$.

Proposizione.

Siano $\zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{P}^1$. Si ha l'equivalenza

$$V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}.$$

Una Proposizione

La mappa $K\colon P^1 \longrightarrow Gr_k(2k)$ descrive la cosiddetta *curva di Morita*. Per questa curva si conosce esplicitamente lo splitting di $K^*\mathcal{S}$, che risulta essere $K^*\mathcal{S} \cong \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{O}(-1) \cong \mathcal{O}(-1)^{\oplus k}$.Usiamo questo fatto per provare la proposizione seguente, che definisce la struttura di $K^*\mathcal{Q}$.

Proposizione.

Siano $\zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{P}^1$. Si ha l'equivalenza

$$V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\} \iff K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}.$$

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Vediamo innanzi tutto l'implicazione $\Longleftarrow$.

Supponiamo, per assurdo, che esista un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1}$.
Per definizione di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k} \longrightarrow K^*\mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

da cui segue la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^0(K^*\mathcal{S})}_{=0} \longrightarrow H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \longrightarrow H^0(K^*\mathcal{Q}) \longrightarrow \underbrace{H^1(K^*\mathcal{S})}_{=0}.$$

Dunque $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Vediamo innanzi tutto l'implicazione $\Longleftarrow$.
Supponiamo, per assurdo, che esista un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1}$.
Per definizione di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k} \longrightarrow K^*\mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

da cui segue la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^0(K^*\mathcal{S})}_{=0} \longrightarrow H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \longrightarrow H^0(K^*\mathcal{Q}) \longrightarrow \underbrace{H^1(K^*\mathcal{S})}_{=0}.$$

Dunque $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Vediamo innanzi tutto l'implicazione $\Longleftarrow$.
Supponiamo, per assurdo, che esista un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1}$.
Per definizione di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k} \longrightarrow K^*\mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

da cui segue la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^0(K^*\mathcal{S})}_{=0} \longrightarrow H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \longrightarrow H^0(K^*\mathcal{Q}) \longrightarrow \underbrace{H^1(K^*\mathcal{S})}_{=0}.$$

Dunque $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Vediamo innanzi tutto l'implicazione $\Longleftarrow$.
Supponiamo, per assurdo, che esista un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1}$.
Per definizione di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k} \longrightarrow K^*\mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

da cui segue la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^0(K^*\mathcal{S})}_{=0} \longrightarrow H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \longrightarrow H^0(K^*\mathcal{Q}) \longrightarrow \underbrace{H^1(K^*\mathcal{S})}_{=0}.$$

Dunque $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Vediamo innanzi tutto l'implicazione $\Longleftarrow$.
Supponiamo, per assurdo, che esista un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1}$.
Per definizione di $\mathcal{S}$ e $\mathcal{Q}$ abbiamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k} \longrightarrow K^*\mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

da cui segue la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \underbrace{H^0(K^*\mathcal{S})}_{=0} \longrightarrow H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \longrightarrow H^0(K^*\mathcal{Q}) \longrightarrow \underbrace{H^1(K^*\mathcal{S})}_{=0}.$$

Dunque $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Ora, $\mathbf{x}$ definisce la sezione olomorfa (perciò costante) σ di $\underline{\mathbb{C}}^{2k}$ data da $\sigma(\zeta) = (\zeta, \mathbf{x})$. Da σ otteniamo una sezione di $K^*\mathcal{Q}$ che si annulla su ζ_0 e ζ_1. Siccome $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$, possiamo vedere le sue sezioni come k-uple di polinomi di primo grado in ζ. Dunque è impossibile che una sezione non nulla di $K^*\mathcal{Q}$ abbia due zeri e questo prova l'implicazione.

Per dimostrare l'altro verso partiamo dall'ipotesi $V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\}$ e ricordiamo che deve valere lo splitting

$$K^*\mathcal{Q} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}(l_j)$$ in virtù del Teorema di Grothendieck.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Ora, $\mathbf{x}$ definisce la sezione olomorfa (perciò costante) σ di $\underline{\mathbb{C}}^{2k}$ data da $\sigma(\zeta) = (\zeta, \mathbf{x})$. Da σ otteniamo una sezione di $K^*\mathcal{Q}$ che si annulla su ζ_0 e ζ_1. Siccome $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$, possiamo vedere le sue sezioni come k-uple di polinomi di primo grado in ζ. Dunque è impossibile che una sezione non nulla di $K^*\mathcal{Q}$ abbia due zeri e questo prova l'implicazione.

Per dimostrare l'altro verso partiamo dall'ipotesi $V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\}$ e ricordiamo che deve valere lo splitting $K^*\mathcal{Q} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}(l_j)$ in virtù del Teorema di Grothendieck.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Ora, $\mathbf{x}$ definisce la sezione olomorfa (perciò costante) σ di $\underline{\mathbb{C}}^{2k}$ data da $\sigma(\zeta) = (\zeta, \mathbf{x})$. Da σ otteniamo una sezione di $K^*\mathcal{Q}$ che si annulla su ζ_0 e ζ_1. Siccome $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$, possiamo vedere le sue sezioni come k-uple di polinomi di primo grado in ζ. Dunque è impossibile che una sezione non nulla di $K^*\mathcal{Q}$ abbia due zeri e questo prova l'implicazione.

Per dimostrare l'altro verso partiamo dall'ipotesi $V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\}$ e ricordiamo che deve valere lo splitting

$$K^*\mathcal{Q} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}(l_j)$$ in virtù del Teorema di Grothendieck.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longleftarrow$

Ora, $\mathbf{x}$ definisce la sezione olomorfa (perciò costante) σ di $\underline{\mathbb{C}}^{2k}$ data da $\sigma(\zeta) = (\zeta, \mathbf{x})$. Da σ otteniamo una sezione di $K^*\mathcal{Q}$ che si annulla su ζ_0 e ζ_1. Siccome $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$, possiamo vedere le sue sezioni come k-uple di polinomi di primo grado in ζ. Dunque è impossibile che una sezione non nulla di $K^*\mathcal{Q}$ abbia due zeri e questo prova l'implicazione.

Per dimostrare l'altro verso partiamo dall'ipotesi $V^{1,0}_{K(\zeta_0)} \cap V^{1,0}_{K(\zeta_1)} = \{\mathbf{0}\}$ e ricordiamo che deve valere lo splitting $K^*\mathcal{Q} = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}(l_j)$ in virtù del Teorema di Grothendieck.

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longrightarrow$

Ricordiamo anche che $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$, perciò $\dim H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) = \dim H^0(K^*\mathcal{Q})$.

Una sezione σ di $K^*\mathcal{Q}$ è data da una k-upla $(P_1, \ldots, P_k)$ di polinomi in ζ con $\deg P_j = l_j$. Se, per assurdo, avessimo $l_j \geq 2$ per almeno un j, diciamo $j = 1$ allora la sezione $(P_1, 0, \ldots, 0)$ avrebbe almeno due zeri, cioè avremmo un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_1} \cap V^{1,0}_{\zeta_2}$ per almeno una coppia di $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Dunque $l_j \neq 1 \Longrightarrow l_j < 1$. Tuttavia, essendo $\dim H^0(K^*\mathcal{Q}) = 2k$, per ogni $l_j < 1$ deve esistere $l_{j'} \geq 2$ e questo non è permesso. Quindi $l_j = 1, j = 1, \ldots, k$. ∎

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longrightarrow$

Ricordiamo anche che $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$, perciò $\dim H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) = \dim H^0(K^*\mathcal{Q})$.
Una sezione σ di $K^*\mathcal{Q}$ è data da una k-upla $(P_1, \ldots, P_k)$ di polinomi in ζ con $\deg P_j = l_j$. Se, per assurdo, avessimo $l_j \geq 2$ per almeno un j, diciamo $j = 1$ allora la sezione $(P_1, 0, \ldots, 0)$ avrebbe almeno due zeri, cioè avremmo un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_1} \cap V^{1,0}_{\zeta_2}$ per almeno una coppia di $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Dunque $l_j \neq 1 \Longrightarrow l_j < 1$. Tuttavia, essendo $\dim H^0(K^*\mathcal{Q}) = 2k$, per ogni $l_j < 1$ deve esistere $l_{j'} \geq 2$ e questo non è permesso. Quindi $l_j = 1, j = 1, \ldots, k$. ∎

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longrightarrow$

Ricordiamo anche che $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$, perciò $\dim H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) = \dim H^0(K^*\mathcal{Q})$.
Una sezione σ di $K^*\mathcal{Q}$ è data da una k-upla $(P_1, \ldots, P_k)$ di polinomi in ζ con $\deg P_j = l_j$. Se, per assurdo, avessimo $l_j \geq 2$ per almeno un j, diciamo $j = 1$ allora la sezione $(P_1, 0, \ldots, 0)$ avrebbe almeno due zeri, cioè avremmo un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_1} \cap V^{1,0}_{\zeta_2}$ per almeno una coppia di $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Dunque $l_j \neq 1 \Longrightarrow l_j < 1$. Tuttavia, essendo $\dim H^0(K^*\mathcal{Q}) = 2k$, per ogni $l_j < 1$ deve esistere $l_{j'} \geq 2$ e questo non è permesso. Quindi $l_j = 1, j = 1, \ldots, k$. ∎

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longrightarrow$

Ricordiamo anche che $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$, perciò $\dim H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) = \dim H^0(K^*\mathcal{Q})$.
Una sezione σ di $K^*\mathcal{Q}$ è data da una k-upla $(P_1, \dots, P_k)$ di polinomi in ζ con $\deg P_j = l_j$. Se, per assurdo, avessimo $l_j \geq 2$ per almeno un j, diciamo $j = 1$ allora la sezione $(P_1, 0, \dots, 0)$ avrebbe almeno due zeri, cioè avremmo un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_1} \cap V^{1,0}_{\zeta_2}$ per almeno una coppia di $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Dunque $l_j \neq 1 \Longrightarrow l_j < 1$.
Tuttavia, essendo $\dim H^0(K^*\mathcal{Q}) = 2k$, per ogni $l_j < 1$ deve esistere $l_{j'} \geq 2$ e questo non è permesso. Quindi $l_j = 1, j = 1, \dots, k$. ∎

Dimostrazione

Dimostrazione: $\Longrightarrow$

Ricordiamo anche che $H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) \cong H^0(K^*\mathcal{Q})$, perciò $\dim H^0(K^*\underline{\mathbb{C}}^{2k}) = \dim H^0(K^*\mathcal{Q})$.
Una sezione σ di $K^*\mathcal{Q}$ è data da una k-upla $(P_1, \ldots, P_k)$ di polinomi in ζ con $\deg P_j = l_j$. Se, per assurdo, avessimo $l_j \geq 2$ per almeno un j, diciamo $j = 1$ allora la sezione $(P_1, 0, \ldots, 0)$ avrebbe almeno due zeri, cioè avremmo un vettore $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_1} \cap V^{1,0}_{\zeta_2}$ per almeno una coppia di $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$. Dunque $l_j \neq 1 \Longrightarrow l_j < 1$.
Tuttavia, essendo $\dim H^0(K^*\mathcal{Q}) = 2k$, per ogni $l_j < 1$ deve esistere $l_{j'} \geq 2$ e questo non è permesso. Quindi $l_j = 1, j = 1, \ldots, k$. ∎

$V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0} = \{\mathbf{0}\}$

Verifichiamo allora una della condizioni della proposizione precedente. Per $i = 1, 2$, a $\zeta_i \in \mathbb{P}^1$ associamo $(a_i, b_i, c_i) \in S^2$ e la struttura complessa $I_{\zeta_i} = a_i I + b_i J + c_i K$.
Si osserva facilmente che $I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}$ è invertibile perciò ha nucleo banale. Ancora, $\mathbf{x} \in \ker(I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}) \iff I_{\zeta_1}\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$. Dunque è impossibile che $\mathbf{x} \in V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0}$ perché altrimenti si avrebbe $I_{\zeta_1}\mathbf{x} = i\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$.
Da ciò segue che $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$.

$V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0} = \{\mathbf{0}\}$

Verifichiamo allora una della condizioni della proposizione precedente. Per $i = 1, 2$, a $\zeta_i \in \mathbb{P}^1$ associamo $(a_i, b_i, c_i) \in S^2$ e la struttura complessa $I_{\zeta_i} = a_i I + b_i J + c_i K$.

Si osserva facilmente che $I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}$ è invertibile perciò ha nucleo banale. Ancora, $\mathbf{x} \in \ker(I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}) \iff I_{\zeta_1}\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$. Dunque è impossibile che $\mathbf{x} \in V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0}$ perché altrimenti si avrebbe $I_{\zeta_1}\mathbf{x} = i\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$.

Da ciò segue che $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$.

$V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1} = \{\mathbf{0}\}$

Verifichiamo allora una della condizioni della proposizione precedente. Per $i = 1, 2$, a $\zeta_i \in \mathbb{P}^1$ associamo $(a_i, b_i, c_i) \in S^2$ e la struttura complessa $I_{\zeta_i} = a_i I + b_i J + c_i K$.
Si osserva facilmente che $I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}$ è invertibile perciò ha nucleo banale. Ancora, $\mathbf{x} \in \ker(I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}) \iff I_{\zeta_1}\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$. Dunque è impossibile che $\mathbf{x} \in V^{1,0}_{\zeta_0} \cap V^{1,0}_{\zeta_1}$ perché altrimenti si avrebbe $I_{\zeta_1}\mathbf{x} = i\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$.
Da ciò segue che $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$.

$V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0} = \{\mathbf{0}\}$

Verifichiamo allora una della condizioni della proposizione precedente. Per $i = 1, 2$, a $\zeta_i \in \mathbb{P}^1$ associamo $(a_i, b_i, c_i) \in S^2$ e la struttura complessa $I_{\zeta_i} = a_i I + b_i J + c_i K$.
Si osserva facilmente che $I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}$ è invertibile perciò ha nucleo banale. Ancora, $\mathbf{x} \in \ker(I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}) \iff I_{\zeta_1}\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$. Dunque è impossibile che $\mathbf{x} \in V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0}$ perché altrimenti si avrebbe $I_{\zeta_1}\mathbf{x} = i\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$.
Da ciò segue che $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$.

$V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0} = \{\mathbf{0}\}$

Verifichiamo allora una della condizioni della proposizione precedente. Per $i = 1, 2$, a $\zeta_i \in \mathbb{P}^1$ associamo $(a_i, b_i, c_i) \in S^2$ e la struttura complessa $I_{\zeta_i} = a_i I + b_i J + c_i K$.
Si osserva facilmente che $I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}$ è invertibile perciò ha nucleo banale. Ancora, $\mathbf{x} \in \ker(I_{\zeta_1} - I_{\zeta_2}) \iff I_{\zeta_1}\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$. Dunque è impossibile che $\mathbf{x} \in V_{\zeta_0}^{1,0} \cap V_{\zeta_1}^{1,0}$ perché altrimenti si avrebbe $I_{\zeta_1}\mathbf{x} = i\mathbf{x} = I_{\zeta_2}\mathbf{x}$.
Da ciò segue che $K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k}$.

$K^*(TGr_k(2k))$

Tenendo presente che $\mathcal{O}(k)^* = \mathcal{O}(-k)$ e combinando quanto visto finora, otteniamo l'isomorfismo

$$K^*(TGr_k(2k)) \cong K^*\mathcal{S}^* \otimes K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k} \otimes \mathcal{O}(1)^{\oplus k} \cong \mathcal{O}(2)^{\oplus k^2}.$$

Dunque una sezione di $K^*(TGr_k(2k))$ si può rappresentare come un polinomio di secondo grado in ζ a coefficienti matriciali

$$A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2, \qquad A_i \in \mathbb{C}^{k,k}.$$

$K^*(TGr_k(2k))$

Tenendo presente che $\mathcal{O}(k)^* = \mathcal{O}(-k)$ e combinando quanto visto finora, otteniamo l'isomorfismo

$$K^*(TGr_k(2k)) \cong K^*\mathcal{S}^* \otimes K^*\mathcal{Q} \cong \mathcal{O}(1)^{\oplus k} \otimes \mathcal{O}(1)^{\oplus k} \cong \mathcal{O}(2)^{\oplus k^2}.$$

Dunque una sezione di $K^*(TGr_k(2k))$ si può rappresentare come un polinomio di secondo grado in ζ a coefficienti matriciali

$$A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2, \qquad A_i \in \mathbb{C}^{k,k}.$$

Anticommutatività

Osserviamo che, fissati $J \in \mathcal{J}(V)$ e $A \in T_J\mathcal{J}(V)$ e fissato $\mathbf{v} \in V_J^{1,0}$ si ha

$$JA\mathbf{v} = -AJ\mathbf{v} = -Ai\mathbf{v} = -iA\mathbf{v} \Longleftrightarrow A\mathbf{v} \in V_J^{0,1}.$$

Quindi $A \in \mathrm{Hom}(V_J^{1,0}, V_J^{0,1})$ e $A(\zeta)$ definisce una sezione di $\mathrm{Hom}(K^*\mathcal{S}, K^*\bar{\mathcal{S}})$. Viceversa se F è un omomorfismo $K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\bar{\mathcal{S}}$, ricordando che la fibra $\mathcal{S}_\zeta = V_{K(\zeta)}^{1,0}$ si ha che $F_\zeta \colon V_{K(\zeta)}^{1,0} \longrightarrow V_{K(\zeta)}^{0,1}$, da cui segue $F_\zeta K(\zeta) = -K(\zeta)F_\zeta$. Perciò $K^*(TGr_k(2k)) = \mathrm{Hom}(K^*\mathcal{S}, K^*\bar{\mathcal{S}})$.

Anticommutatività

Osserviamo che, fissati $J \in \mathcal{J}(V)$ e $A \in T_J\mathcal{J}(V)$ e fissato $\mathbf{v} \in V_J^{1,0}$ si ha

$$JA\mathbf{v} = -AJ\mathbf{v} = -Ai\mathbf{v} = -iA\mathbf{v} \iff A\mathbf{v} \in V_J^{0,1}.$$

Quindi $A \in \mathrm{Hom}(V_J^{1,0}, V_J^{0,1})$ e $A(\zeta)$ definisce una sezione di $\mathrm{Hom}(K^*\mathcal{S}, K^*\bar{\mathcal{S}})$. Viceversa se F è un omomorfismo $K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\bar{\mathcal{S}}$, ricordando che la fibra $\mathcal{S}_\zeta = V_{K(\zeta)}^{1,0}$ si ha che $F_\zeta \colon V_{K(\zeta)}^{1,0} \longrightarrow V_{K(\zeta)}^{0,1}$, da cui segue $F_\zeta K(\zeta) = -K(\zeta)F_\zeta$. Perciò $K^*(TGr_k(2k)) = \mathrm{Hom}(K^*\mathcal{S}, K^*\bar{\mathcal{S}})$.

Anticommutatività

Osserviamo che, fissati $J \in \mathcal{J}(V)$ e $A \in T_J\mathcal{J}(V)$ e fissato $\mathbf{v} \in V_J^{1,0}$ si ha

$$JA\mathbf{v} = -AJ\mathbf{v} = -Ai\mathbf{v} = -iA\mathbf{v} \Longleftrightarrow A\mathbf{v} \in V_J^{0,1}.$$

Quindi $A \in \mathrm{Hom}(V_J^{1,0}, V_J^{0,1})$ e $A(\zeta)$ definisce una sezione di $\mathrm{Hom}(K^*\mathcal{S}, K^*\bar{\mathcal{S}})$. Viceversa se F è un omomorfismo $K^*\mathcal{S} \longrightarrow K^*\bar{\mathcal{S}}$, ricordando che la fibra $\mathcal{S}_\zeta = V_{K(\zeta)}^{1,0}$ si ha che $F_\zeta \colon V_{K(\zeta)}^{1,0} \longrightarrow V_{K(\zeta)}^{0,1}$, da cui segue $F_\zeta K(\zeta) = -K(\zeta)F_\zeta$. Perciò $K^*(TGr_k(2k)) = \mathrm{Hom}(K^*\mathcal{S}, K^*\bar{\mathcal{S}})$.

"Coniugio", ma non troppo

Da questo segue che, fissato $\zeta_0 \in \mathbb{P}^1$, se $P \in GL(k, \mathbb{C})$ rappresenta un cambiamento di base in $\mathcal{S}_{\zeta_0}$ allora $\bar{P}$ rappresenta il cambiamento di base indotto su $\overline{\mathcal{S}_{\zeta_0}}$ e risulta $A'(\zeta_0) = \bar{P}^{-1}A(\zeta_0)P$. Supponendo di avere una metrica Hermitiana h su V ed identificando $\overline{\mathcal{S}_{\zeta_0}}$ e $\mathcal{S}^*$, otteniamo $A'(\zeta_0) = {}^tPA(\zeta_0)P$. Se $P \in U(n)$ ritroviamo la formula precedente.

"Coniugio", ma non troppo

Da questo segue che, fissato $\zeta_0 \in \mathbb{P}^1$, se $P \in GL(k, \mathbb{C})$ rappresenta un cambiamento di base in $\mathcal{S}_{\zeta_0}$ allora $\bar{P}$ rappresenta il cambiamento di base indotto su $\overline{\mathcal{S}_{\zeta_0}}$ e risulta $A'(\zeta_0) = \bar{P}^{-1}A(\zeta_0)P$. Supponendo di avere una metrica Hermitiana h su V ed identificando $\overline{\mathcal{S}_{\zeta_0}}$ e $\mathcal{S}^*$, otteniamo $A'(\zeta_0) = {}^tPA(\zeta_0)P$. Se $P \in U(n)$ ritroviamo la formula precedente.

Grazie per l'attenzione.